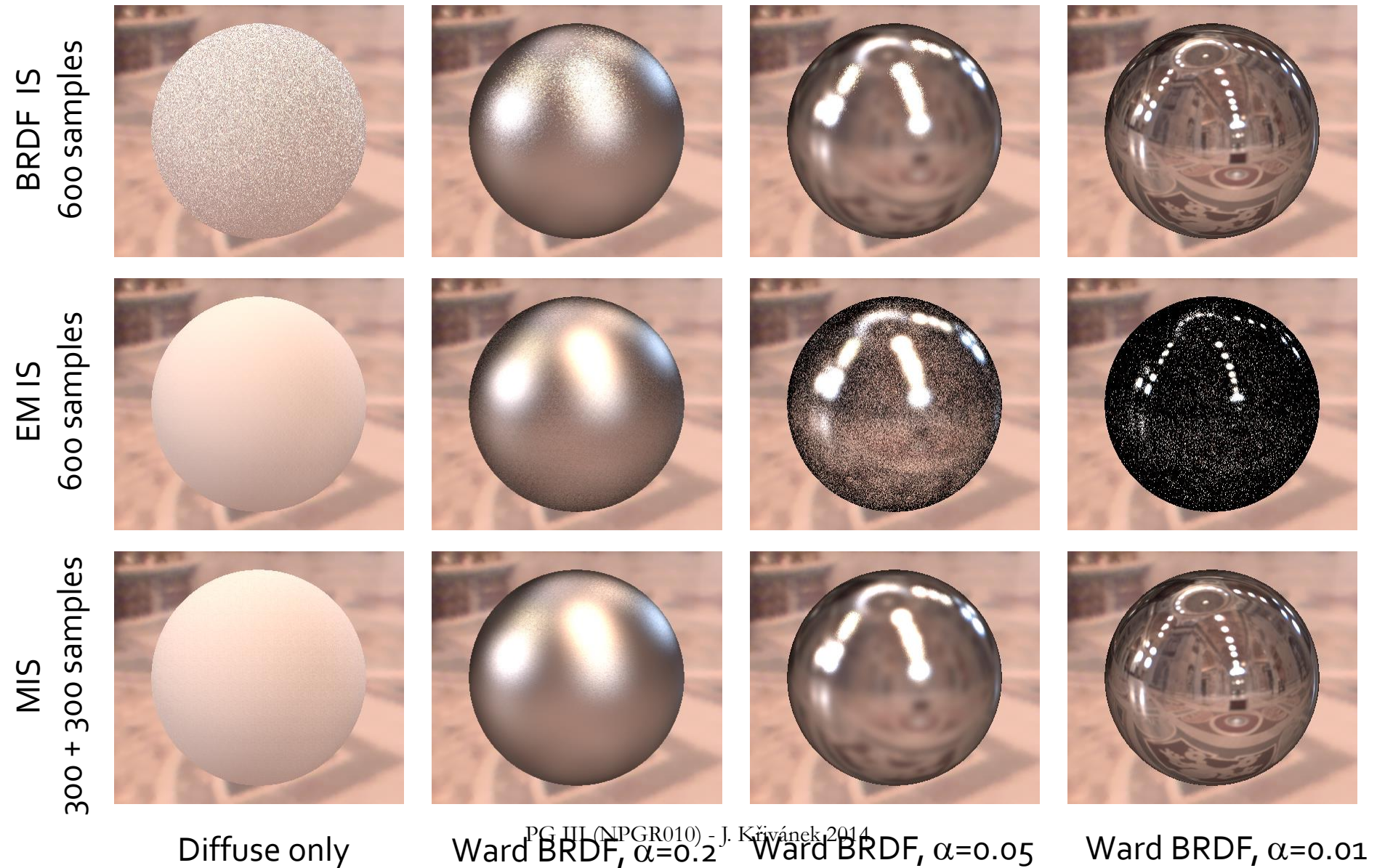

Počítačová grafika III – Multiple Importance Sampling

Jaroslav Křivánek, MFF UK

Jaroslav.Krivanek@mff.cuni.cz

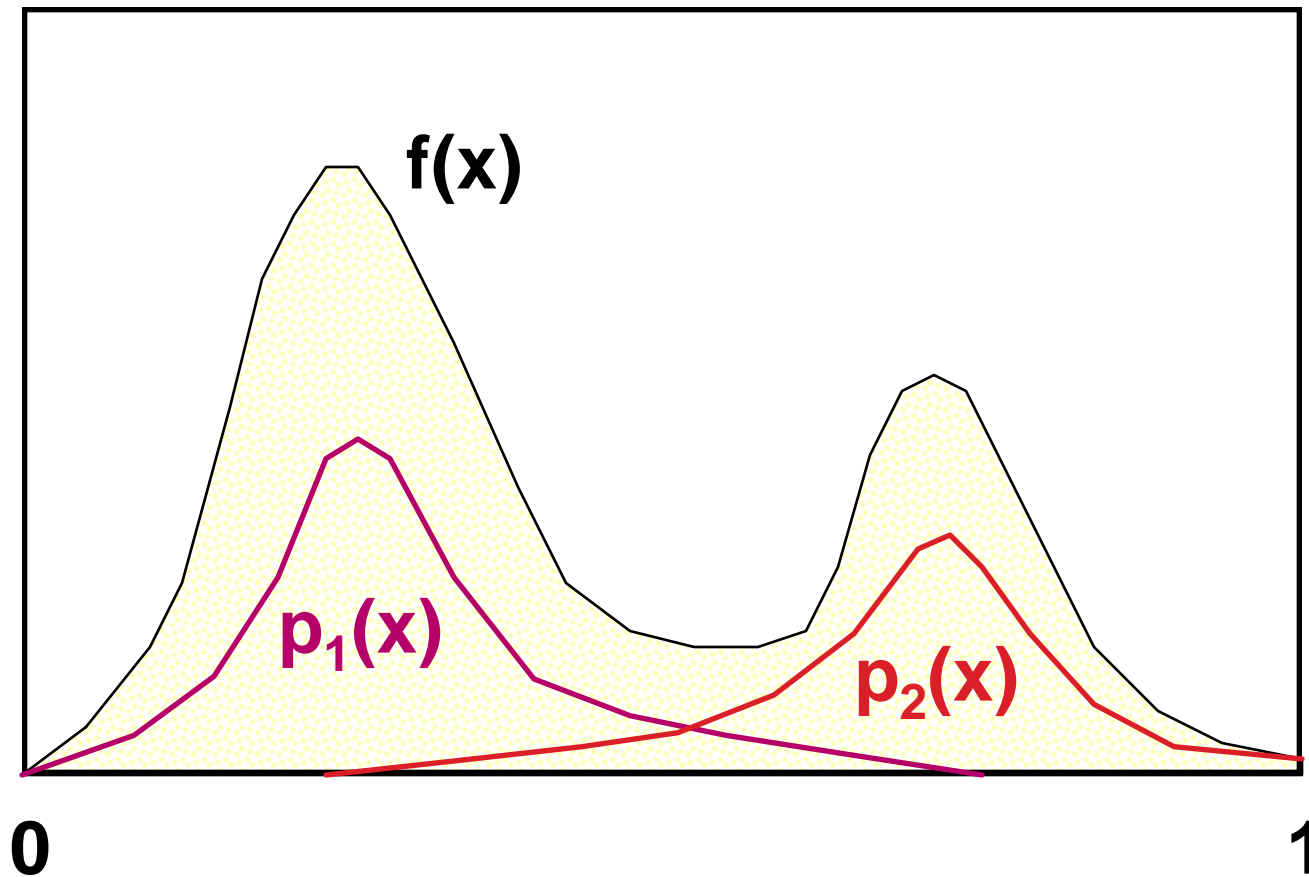
Sampling strategies



Zpět k obecnému MC integrování – „Multiple Importance Sampling“

Multiple Importance Sampling

(Veach & Guibas, 95)



Multiple importance sampling

- Máme dáno n vzorkovacích „technik“ (hustot pravděpodobnosti) $p_1(x), \dots, p_n(x)$
- Z každé techniky (hustoty) vybereme n_i vzorků $X_{i,1}, \dots, X_{i,n_i}$

- **Kombinovaný estimátor**

kombinační váhy
(mohou být různé pro každý vzorek)

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} w_i(X_{i,j}) \frac{f(X_{i,j})}{p_i(X_{i,j})}$$

vzorkovací
techniky

vzorky z
jednotlivých technik

Nestrannost kombinovaného odhadu

$$E[F] = \dots = \int \left[\sum_{i=1}^n w_i(x) \right] f(x) dx \equiv \int f(x)$$

- Podmínka pro váhové funkce

$$\forall x: \sum_{i=1}^n w_i(x) = 1$$

Volba váhových funkcí

- **Cíl:** minimalizovat rozptyl kombinovaného estimátoru

1. Aritmetický průměr (velmi špatná kombinace)

$$w_i(x) = \frac{1}{n}$$

2. Vyrovnaná heuristika (velmi dobrá kombinace)

□

Vyrovnaná heuristika (Balance heurist.)

- Kombinační váhy

$$\hat{w}_i(\mathbf{x}) = \frac{n_i p_i(\mathbf{x})}{\sum_k n_k p_k(\mathbf{x})}$$

- Výsledný estimátor (po dosazení vah)

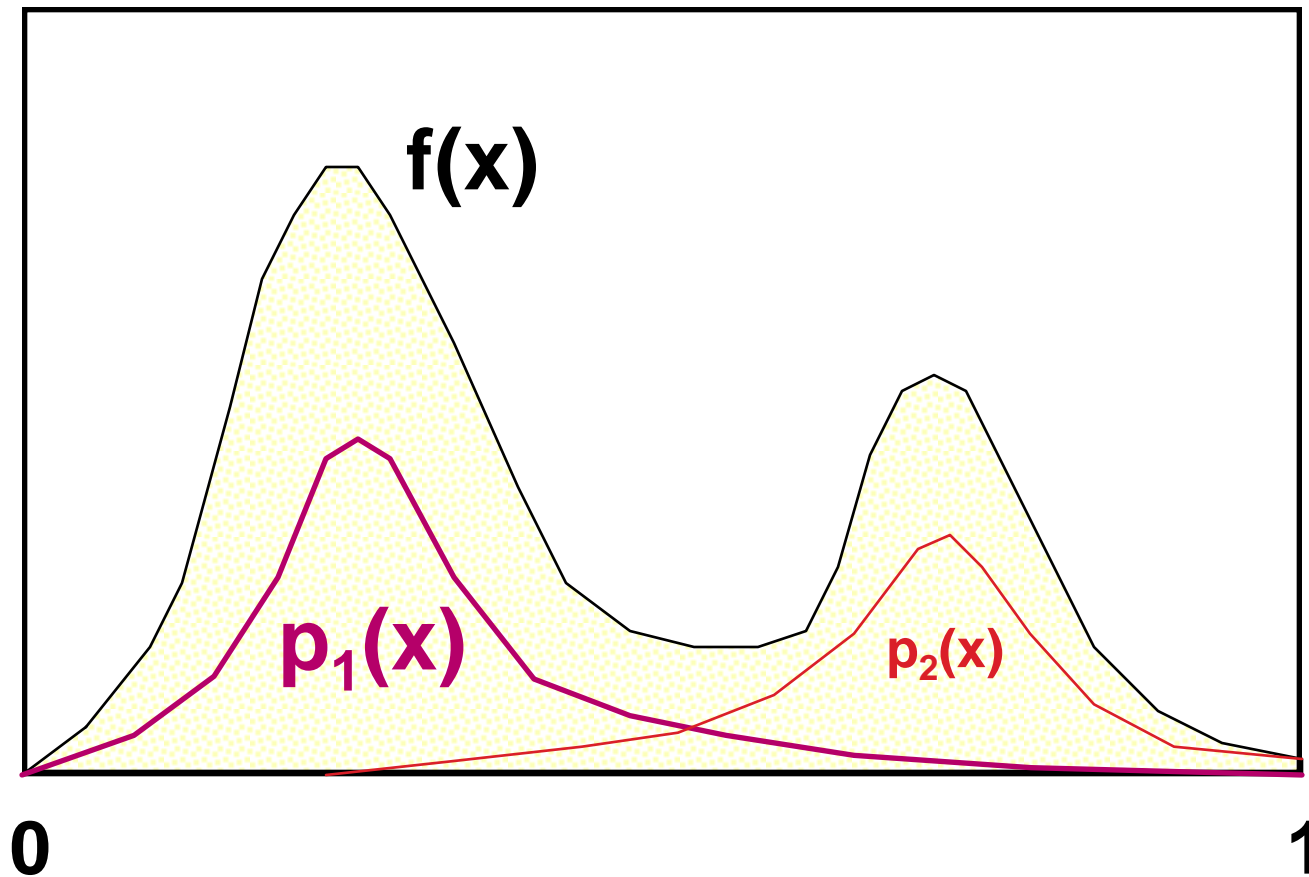
$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{f(X_{i,j})}{\sum_k n_k p_k(X_{i,j})}$$

- příspěvek vzorku nezávisí na tom, ze které byl pořízen techniky (tj. pdf)

Vyrovnaná heuristika (Balance heurist.)

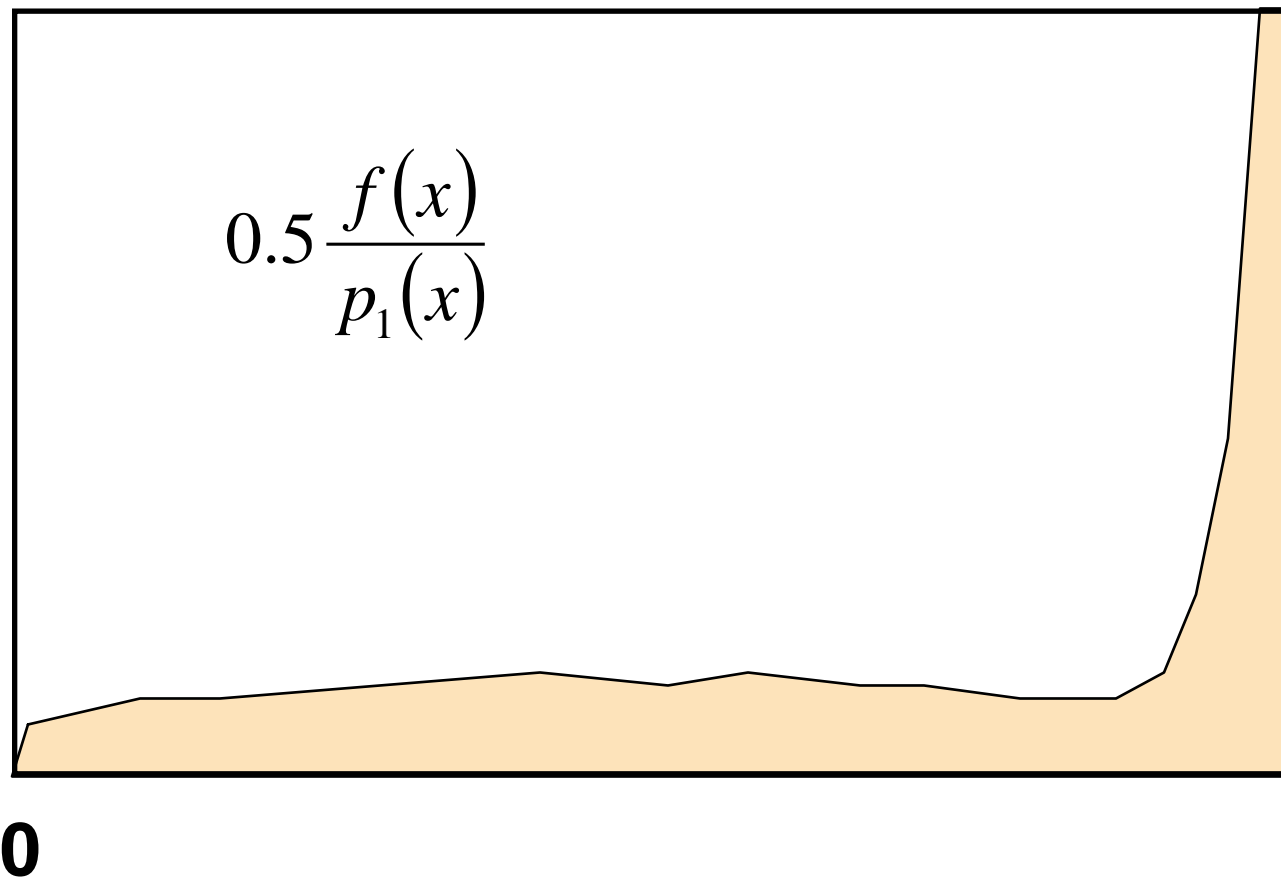
- Vyrovnaná heuristika je téměř optimální
 - Žádný kombinovaný estimátor nemůže mít rozptyl „o mnoho“ menší než vyrovnaná heuristika
- Další možné kombinační heuristiky
 - Maximální heuristika
 - Mocninná heuristika
 - viz. Veach 1997

Jeden člen kombinovaného odhadu

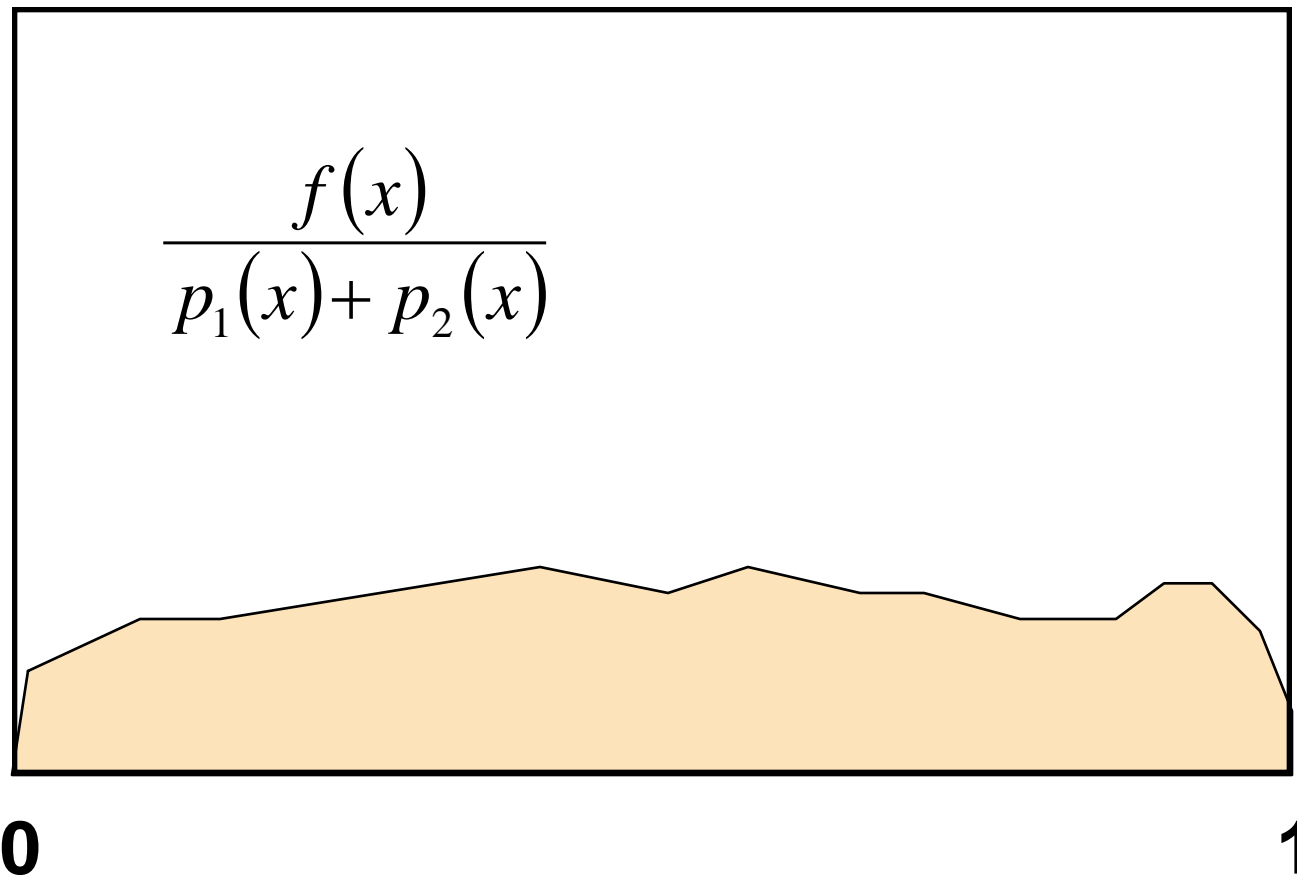


Aritmetický průměr

$$0.5 \frac{f(x)}{p_1(x)} + 0.5 \frac{f(x)}{p_2(x)}$$



Vyrovnaná heuristika

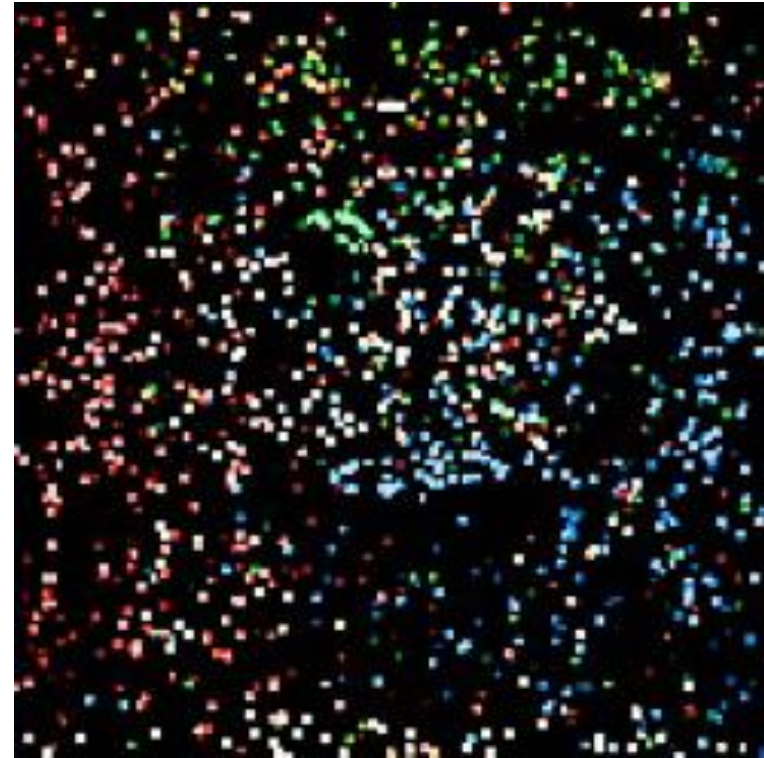


Výpočet přímého osvětlení pomocí MIS

Problém: Najdeme náhodným vzorkováním BRDF světlo?



reference



simple path tracer
(150 cest na pixel)

Images: Alexander Wilkie

Přímé osvětlení

- Řešíme problém:

přímé osvětlení z daného zdroje světla

tj. odražená radiance z bodu \mathbf{x} způsobená osvětlením ze zdroje světla

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

1. **Vzorkování BRDF**
2. **Vzorkování plochy světél**

Dvě vzorkovací techniky

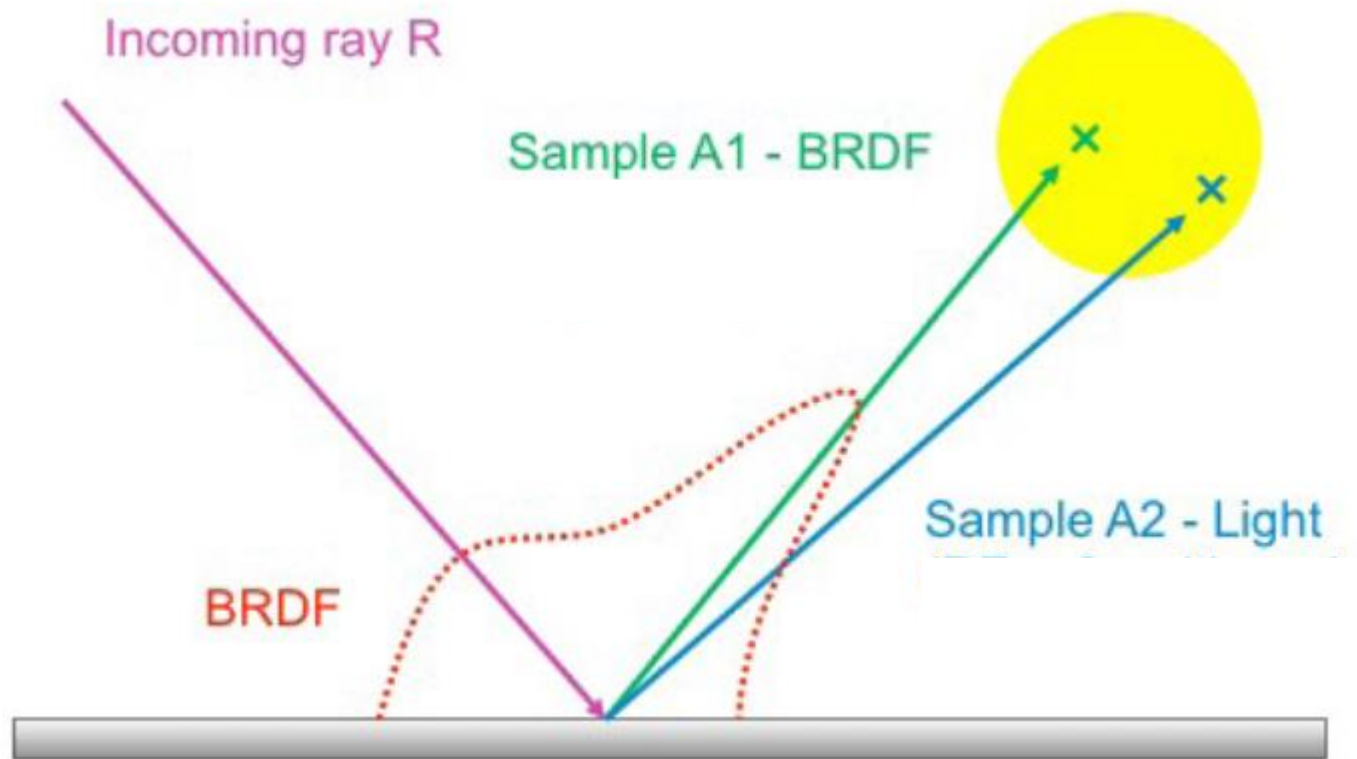


Image: Alexander Wilkie

Přímé osvětlení: Vzorkování BRDF

- **Formulace integrálu** (integrování přes hemisféru nad \mathbf{x})

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{H(\mathbf{x})} L_e(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega_i), -\omega_i) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_i \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_i \, d\omega_i$$

- **MC estimátor**

- Generujeme náhodný směr $\omega_{i,k}$ podle hustoty p
- Vrhne paprsek z \mathbf{x} ve směru $\omega_{i,k}$
- Pokud protne nějaký zdroj světla, přičteme $L_e(\cdot) f_r(\cdot) \cos$ /pdf

$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{L_e(\mathbf{r}(\mathbf{x}, \omega_{i,k}), -\omega_{i,k}) \cdot f_r(\mathbf{x}, \omega_{i,k} \rightarrow \omega_o) \cdot \cos \theta_{i,k}}{p(\omega_{i,k})}$$

Přímé osvětlení: Vzorkování povrchu zdrojů světla

- **Formulace integrálu** (integrování přes plochu zdroje)

$$L_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_A L_e(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{x}) dA_y$$

- **MC estimátor**

- Generujeme náhodnou pozici \mathbf{y}_k na zdroji
- Testujeme viditelnost mezi \mathbf{x} a \mathbf{y}
- Pokud $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})=1$, přičteme $|A| L_e(\mathbf{y}) f_r(\cdot) \cos/\text{pdf}$

$$\hat{L}_r(\mathbf{x}, \omega_o) = \frac{|A|}{N} \sum_{k=1}^N L_e(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x}) \cdot f_r(\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \omega_o) \cdot V(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{y}_k \leftrightarrow \mathbf{x})$$

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

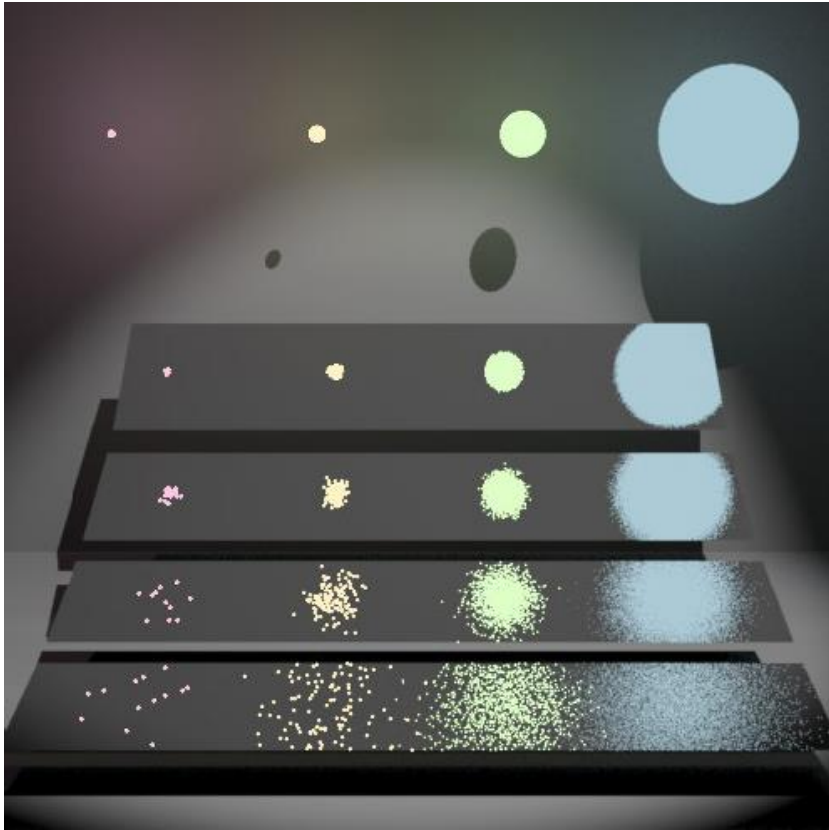
■ Vzorkování BRDF

- Výhodnější pro velké zdroje světla
- Pro malé zdroje světla je pravděpodobnost zásahu zdroje velmi malá -> vysoký rozptyl, šum

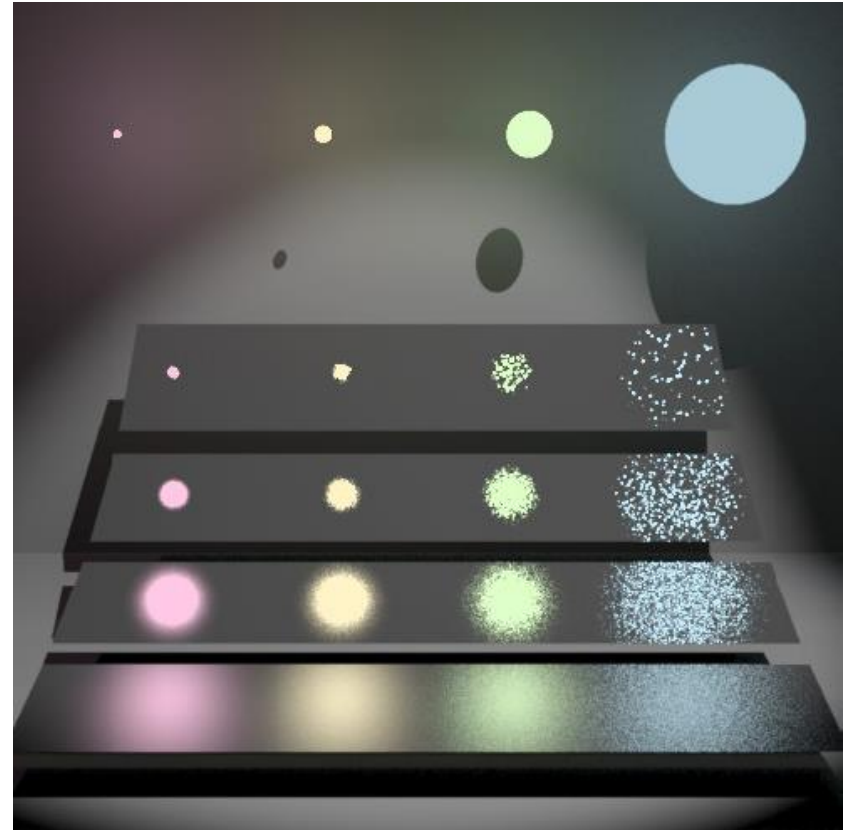
■ Vzorkování světel

- Výhodnější pro malé zdroje
- Jediná možná alternativa pro bodové zdroje
- Pro velké zdroje mnoho vzorků mimo lalok BRDF -> vysoký rozptyl, šum

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy



Vzorkování BRDF



Vzorkování světla

Images: Eric Veach

Přímé osvětlení: Dva možné přístupy

- Kterou techniku zvolit?

- **OBĚ**

- **Problém**

- Obě techniky odhadují stejnou veličinu $L_r(\mathbf{x}, \omega_o)$

- Pouhým sečtením bychom dostali odhad $2 L_r(\mathbf{x}, \omega_o)$ - špatně

- Potřebuji vážený průměr příspěvků obou technik

- **Jak zvolit váhy?**

Jak zvolit váhy?

- **Multiple importance sampling** (Veach & Guibas, 95)
- Váhy závislé na pdf vzorků
- Minimalizuje rozptyl kombinovaného estimátoru
- Téměř optimální řešení

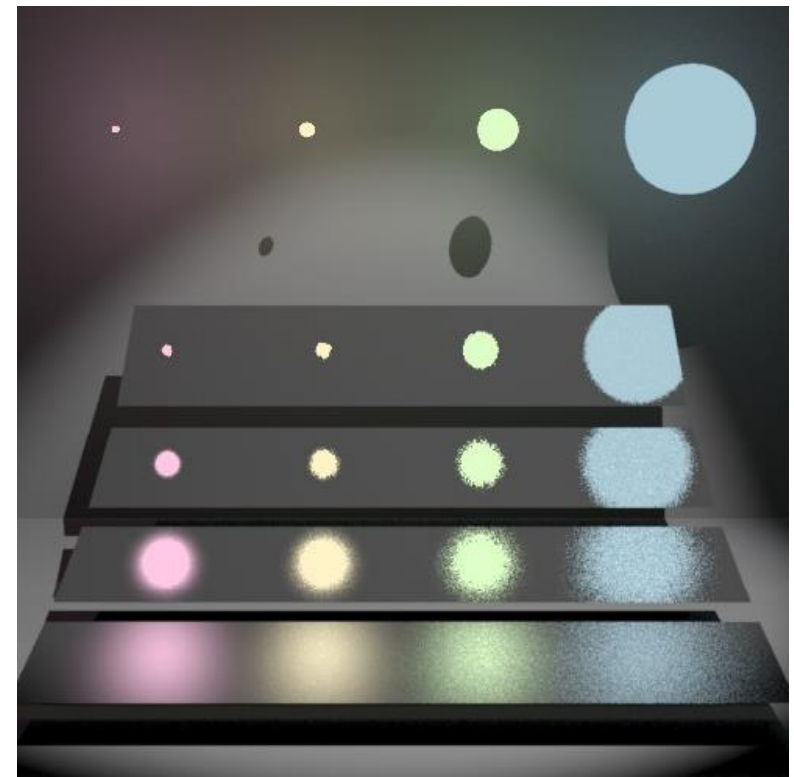


Image: Eric Veach

Výpočet přímého osvětlení pomocí MIS

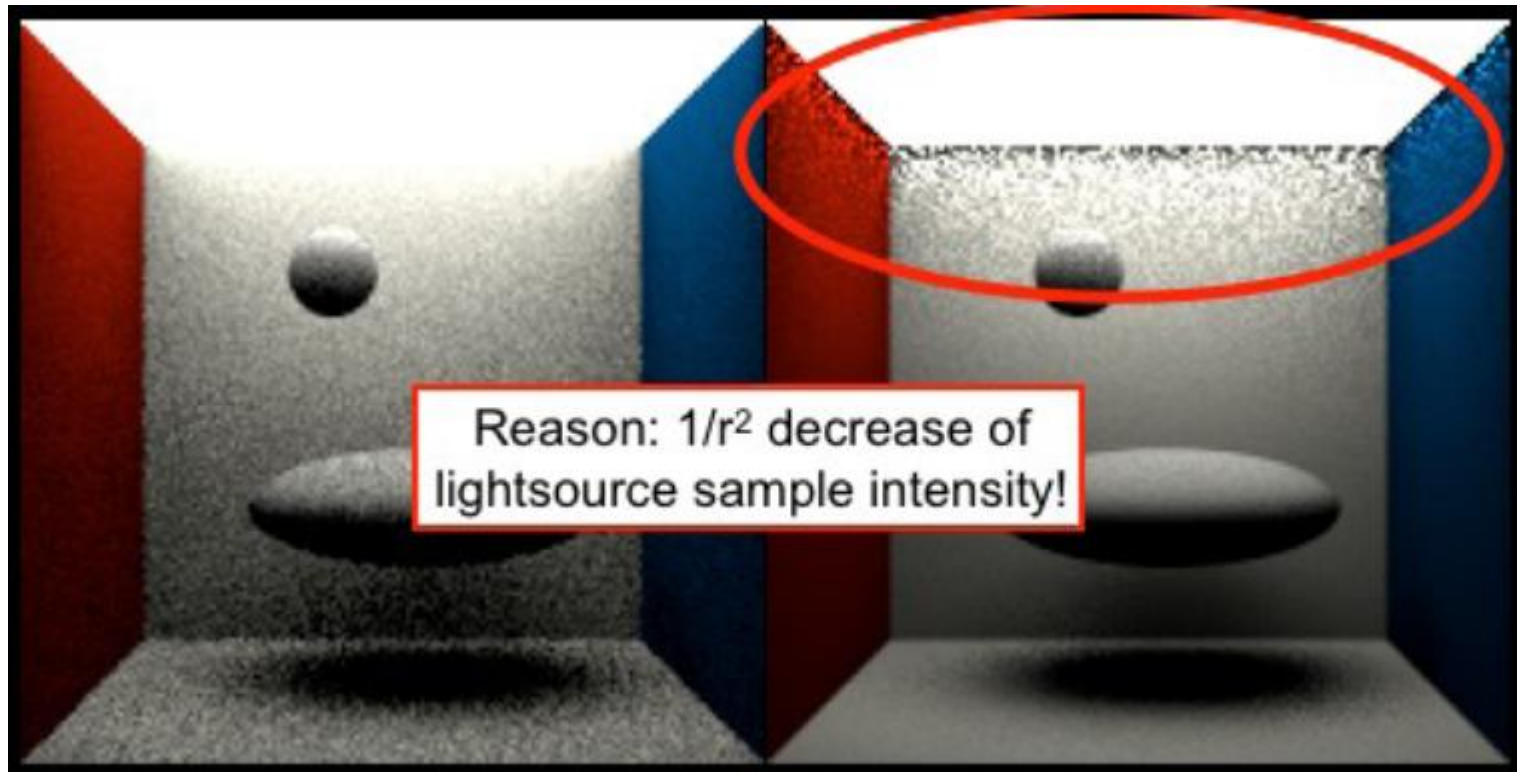
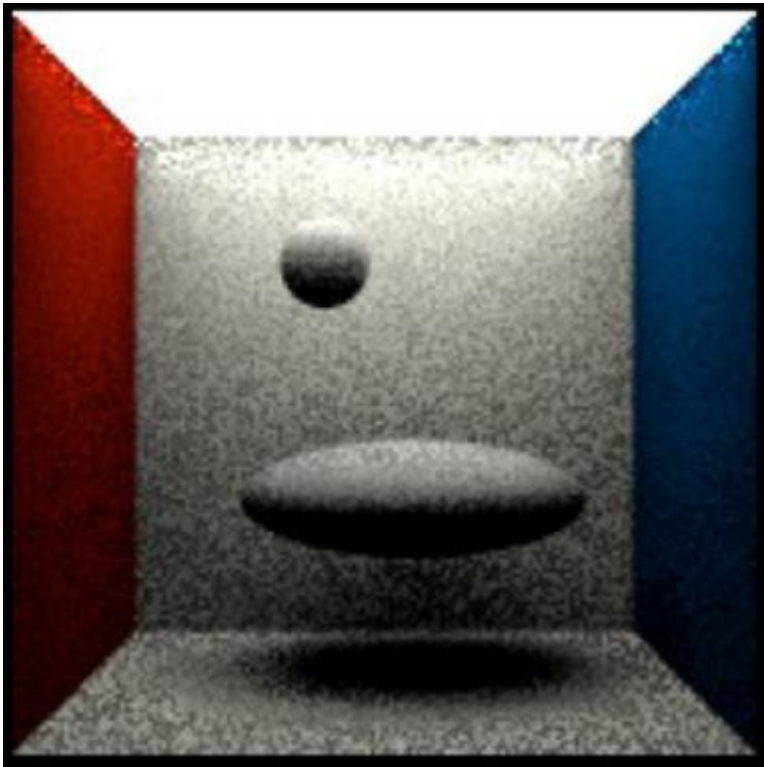


Image: Alexander Wilkie

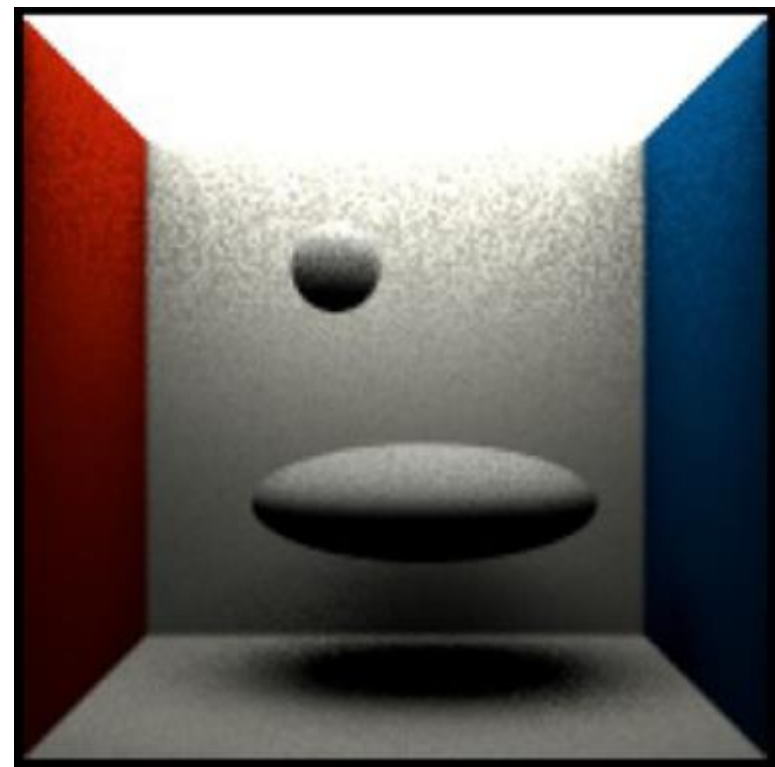
**Vzorkovací technika (pdf) p_1 :
Vzorkování BRDF**

**Vzorkovací technika (pdf) p_2 :
Vzorkování plochy světla**

Kombinace



Aritmetický průměr
Zachovává špatné vlastnosti
obou technik



Vyrovnaná heuristika
Bingo!!!

Image: Alexander Wilkie

Dvě vzorkovací techniky

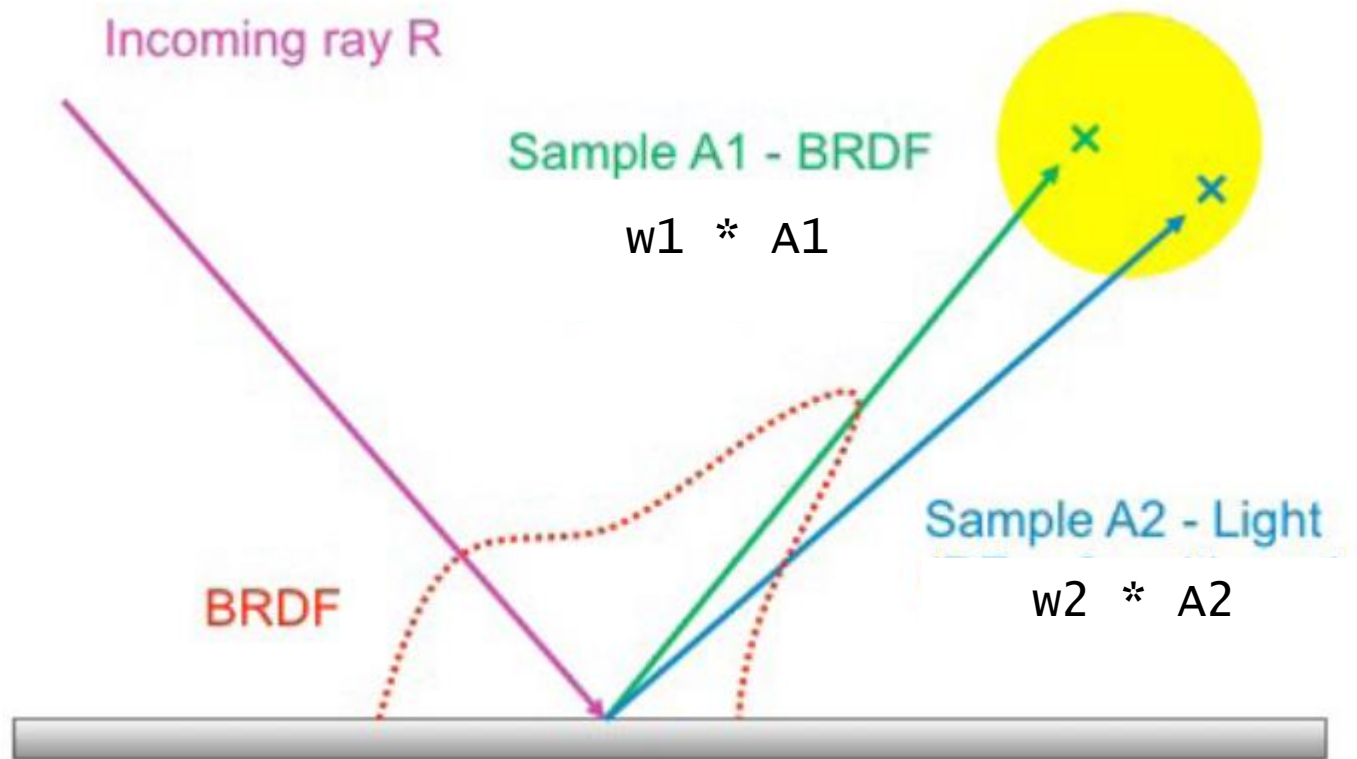


Image: Alexander Wilkie

Výpočet vah

Váha vzorku z
BRDF vzorkování

$$w_1(\omega_j) = \frac{p_1(\omega_j)}{p_1(\omega_j) + p_2(\omega_j)}$$

Hustota pravděpodobnosti
vzorkování z BRDF

**Hustota, s jakou by byl směr ω_j vygenerován,
kdybychom byli použili vzorkování plochy zdroje**

Hustoty pravděpodobnosti

- **Vzorkování BRDF: $p_1(\omega)$**

- Závisí na BRDF, např. pro Lambertovskou BRDF

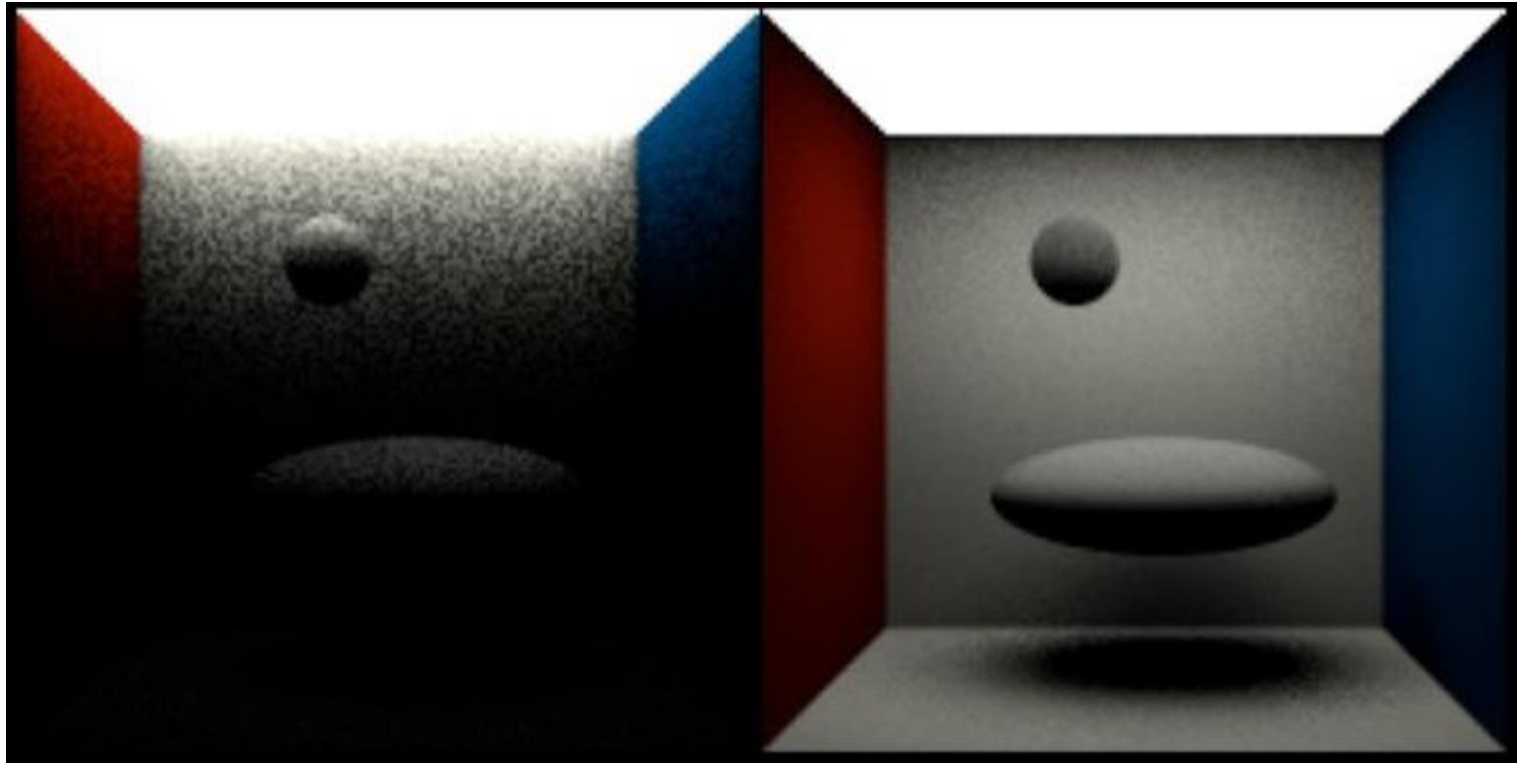
$$p_1(\omega) = \frac{\cos \theta_x}{\pi}$$

- **Vzorkování plochy zdroje: $p_2(\omega)$**

$$p_2(\omega) = \frac{1}{|A|} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\cos \theta_y}$$

↖ **Převodní hustoty $1/|A|$ z plošné míry (dA) do míry prostorového úhlu (d ω)**

Příspěvky vzorkovacích technik



w1 * vzorkování BRDF

w2 * vzorkování zdroje

Image: Alexander Wilkie